(2) Soit $p \in IN^*$; supposons que $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} F_p(x)\right)$ existe et fini; montrons que $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} F_{p+1}(x)\right)$ existe et fini.

en effet

$$F_{p+1}(x) + F_p(x) = \frac{1-e^{px}}{p} \Leftrightarrow F_{p+1}(x) = \frac{1-e^{px}}{p} - F_p(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{x\to-\infty} F_p(x)\right) \text{ exite et fini} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-e^{px}}{p} = \frac{1}{p} \in IR\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1-e^{px}}{p} - F_p(x)\right] \text{ exite et fini}$$

$$\Rightarrow \left(\lim_{x\to-\infty} F_{p+1}(x)\right) \text{ existe et fini}$$

Conclusion : (1) et (2) $\Rightarrow \forall n \in IN^*, \left(\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)\right)$ existe et fini.

3/a- Soit $t \leqslant 0$.

$t \leqslant 0 \Leftrightarrow e^t \leqslant e^0 = 1$

donc $\begin{cases} e^t + 1 \leqslant 1 + 1 \\ e^t + e^t \leqslant e^t + 1 \end{cases}$ par suite $\underline{2e^t \leqslant 1 + e^t \leqslant 2}$

b- Soit $n \in IN$ et $n \geqslant 2$; Soit $x \in IR^-$ on a :

$\forall t \in [x;0]$ on peut dire d'après la question précédente que

$$2e^t \leqslant 1 + e^t \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+e^t} \leqslant \frac{1}{2e^t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{nt}}{2} \leqslant \frac{e^{nt}}{1+e^t} \leqslant \frac{e^{(n-1)t}}{2}$$

et comme de plus les fonctions $\left(t \mapsto \frac{e^{nt}}{2}\right)$; $\left(t \mapsto \frac{e^{nt}}{1+e^t}\right)$ et $\left(t \mapsto \frac{e^{(n-1)t}}{2}\right)$ sont des fonctions continues sur $]-\infty;0]$

par suite $\forall x \leqslant 0$; $\int_x^0 \frac{e^{nt}}{2}dt \leqslant \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt \leqslant \int_x^0 \frac{e^{(n-1)t}}{2}dt$

$$\Leftrightarrow \forall x \leqslant 0; \left[\frac{1}{2n}e^{nt}\right]_x^0 \leqslant F_n(x) \leqslant \left[\frac{1}{2(n-1)}e^{(n-1)t}\right]_x^0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \leqslant 0; \frac{1-e^{nx}}{2n} \leqslant F_n(x) \leqslant \frac{1-e^{(n-1)x}}{2(n-1)}.$$

c- $\forall n \in IN$ tel que $n \geqslant 2$

- $R_n = \lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$; - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-e^{nx}}{2n} = \frac{1}{2n}$; - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-e^{(n-1)x}}{2(n-1)} = \frac{1}{2(n-1)}$

et comme $\frac{1-e^{nx}}{2n} \leqslant F_n(x) \leqslant \frac{1-e^{(n-1)x}}{2(n-1)}$ pour tout $n \geqslant 2$ et $x \leqslant 0$

alors $\frac{1}{2n} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$.